Método Axiomático e Teorias Formais

#05

Tópicos do vídeo anterior...

- Teoria formal L para a lógica proposicional.
- Metateoremas:
  - Corretude
  - Completude
  - Decidibilidade

Independência de axiomas e interpretação

Um axioma *A* é *independente* dos demais axiomas de uma dada teoria formal se não pode ser provado a partir destes demais axiomas por meio das regras de inferência da teoria.

Uma *interpretação* é uma atribuição de significados aos termos primitivos de uma teoria formal.

Independência de axiomas

Para mostrar que um axioma A é *independente* dos demais axiomas, temos que exibir uma interpretação na qual

- todos os axiomas são verdadeiros
- todas as regras de inferência da teoria preservem a verdade
- A não é verdadeiro.

Axiomas da teoria formal L para a lógica proposicional

(A1) $\big(B \to (C \to B)\big)$

(A2) $\Big(\big(B \to (C \to D)\big) \to \big((B \to C) \to (B \to D)\big)\Big)$

(A3) $\Big(\big((\neg C) \to (\neg B)\big) \to \big(\big((\neg C) \to B\big) \to C\big)\Big)$

Vamos mostrar que A1 é independente de A2 e A3.

Tabelas verdade

A	$\neg A$
0	1
1	1
2	0

Def.: Uma fórmula é uma "zerologia" se ela assume sempre o valor lógico 0 (zero).

A	B	$A \rightarrow B$
0	0	0
0	1	2
0	2	2
1	0	2
1	1	2
1	2	0
2	0	0
2	1	0
2	2	0

Axioma A1:
$(B \to (C \to B))$

B	C	$C \to B$	$B \to (C \to B)$
0	0		
0	1		
0	2		
1	0		
1	1		
1	2		
2	0		
2	1		
2	2		

Axioma A1:
$(B \to (C \to B))$

B	C	$C \to B$	$B \to (C \to B)$
0	0	0	
0	1	2	
0	2	0	
1	0	2	
1	1	2	
1	2	0	
2	0	2	
2	1	0	
2	2	0	

Axioma A1:
$(B \to (C \to B))$

Não é uma
"zerologia"

B	C	$C \to B$	$B \to (C \to B)$
0	0	0	0
0	1	2	2
0	2	0	0
1	0	2	0
1	1	2	0
1	2	0	2
2	0	2	0
2	1	0	0
2	2	0	0

Axioma A3: $\Big((\neg C) \to (\neg B)\Big) \to \Big((\neg C) \to B\Big) \to C\Big)\Big)$

C	B	$\neg C$	$\neg B$	$\neg C \to \neg B$	$\neg C \to B$	$(\neg C \to B) \to C$	$\to$
0	0						
0	1						
0	2						
1	0						
1	1						
1	2						
2	0						
2	1						
2	2						

Axioma A3: $\Big((\neg C) \to (\neg B)\Big) \to \Big((\neg C) \to B\Big) \to C\Big)\Big)$

C	B	$\neg C$	$\neg B$	$\neg C \to \neg B$	$\neg C \to B$	$(\neg C \to B) \to C$	$\to$
0	0	1	1				
0	1	1	1				
0	2	1	0				
1	0	1	1				
1	1	1	1				
1	2	1	0				
2	0	0	1				
2	1	0	1				
2	2	0	0				

Axioma A3: $\Big((\neg C) \to (\neg B)\Big) \to \Big((\neg C) \to B\Big) \to C\Big)\Big)$

C	B	$\neg C$	$\neg B$	$\neg C \to \neg B$	$\neg C \to B$	$(\neg C \to B) \to C$	$\to$
0	0	1	1	2			
0	1	1	1	2			
0	2	1	0	2			
1	0	1	1	2			
1	1	1	1	2			
1	2	1	0	2			
2	0	0	1	2			
2	1	0	1	2			
2	2	0	0	0			

Axioma A3: $\Big((\neg C) \to (\neg B)\Big) \to \Big((\neg C) \to B\Big) \to C\Big)\Big)$

C	B	$\neg C$	$\neg B$	$\neg C \to \neg B$	$\neg C \to B$	$(\neg C \to B) \to C$	$\to$
0	0	1	1	2	2		
0	1	1	1	2	2		
0	2	1	0	2	0		
1	0	1	1	2	2		
1	1	1	1	2	2		
1	2	1	0	2	0		
2	0	0	1	2	0		
2	1	0	1	2	2		
2	2	0	0	0	2		

Axioma A3: $\Big((\neg C) \to (\neg B)\Big) \to \Big((\neg C) \to B\Big) \to C\Big)\Big)$

C	B	$\neg C$	$\neg B$	$\neg C \to \neg B$	$\neg C \to B$	$(\neg C \to B) \to C$	$\to$
0	0	1	1	2	2	0	
0	1	1	1	2	2	0	
0	2	1	0	2	0	0	
1	0	1	1	2	2	0	
1	1	1	1	2	2	0	
1	2	1	0	2	0	2	
2	0	0	1	2	0	2	
2	1	0	1	2	2	0	
2	2	0	0	0	2	0	

Axioma A3: $\Big((\neg C) \to (\neg B)\Big) \to \Big((\neg C) \to B\Big) \to C\Big)\Big)$

C	B	$\neg C$	$\neg B$	$\neg C \to \neg B$	$\neg C \to B$	$(\neg C \to B) \to C$	$\to$
0	0	1	1	2	2	0	0
0	1	1	1	2	2	0	0
0	2	1	0	2	0	0	0
1	0	1	1	2	2	0	0
1	1	1	1	2	2	0	0
1	2	1	0	2	0	2	0
2	0	0	1	2	0	2	0
2	1	0	1	2	2	0	0
2	2	0	0	0	2	0	0

Modus Ponens preserva "zerologias"

Modus Ponens (MP):
B é consequência de A e $(A \to B)$.

A	B	$A \to B$
0		0
0		0
0		0
⋮		⋮
0		0
0		0

Modus Ponens preserva "zerologias"

Modus Ponens (MP):
B é consequência de A e $(A \to B)$.

A	B	$A \to B$
0	0	0
0	0	0
0	0	0
⋮	⋮	⋮
0	0	0
0	0	0

Conclusão

O axioma A1 é independente de A2 e A3:

- A2 e A3 são “zerologias”;
- MP preserva “zerologia”;
- A1 não é “zerologia”.

Número Imaginário

numeroimaginario.com.br